6.1.5 Lorentzovy transformace a skládání rychlostí

Předpoklady: 6105

Galileiho (speciální) transformace (rovnice na převod souřadnic a času v klasické fyzice s absolutním časem a prostorem): $x'=x-vt$, $y'=y$, $z'=z$, $t'=t$ (speciální = popisuje speciální případ, kdy se předmět pohybuje rovnoběžně se souřadnou osou *x*, soustava souřadnic S stojí, soustava souřadnic S' se vůči ní pohybuje rychlostí *v*).

Ve speciální teorii relativity je všechno divné, čas se zpomaluje, prostor se deformuje $\Rightarrow$ budeme potřebovat jinou sadu rovnic na převod souřadnic.

Lorentzova transformace: $x'=\dfrac{x-vt}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$, $y'=y$, $z'=z$, $t'=\dfrac{t-\dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$

- Odvodil H.A. Lorentz (použití těchto rovnic vysvětlovalo mnoho experimentů, ale před Einsteinem nemělo hlubší důvod).
- Vysvětluje negativní výsledky pokusů o změření rychlosti Země vůči éteru.
- Pokud se souřadnice a čas transformují tímto způsobem, nedá se pomocí elektromagnetických pokusů určit, zda se soustava pohybuje nebo je v klidu (říkáme, že Maxwellovy rovnice jsou vůči této transformaci invariantní, stejně jako jsou zákony klasické mechaniky invariantní vůči Galileiho transformaci).
- Dají se odvodit i z čistě matematických předpokladů, místo rychlosti světla *c* se v nich vyskytuje v_{max} - maximální možná rychlost ve zkoumaném vesmíru.
- Dnes plní roli filtru na nové fyzikální teorie. Teorie, která není invariantní vůči Lorentzově transformaci, je zřejmě špatná.

Čím se liší od Galileiho transformace?

- $\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$ - Lorentzův faktor, známe z již odvozených vzorců, způsobuje zpomalování času, zkracování předmětů.
- Člen $\dfrac{v}{c^2}x$ v rovnici pro čas způsobuje relativitu současnosti.

Př. 1: Najdi limitní tvar Lorentzovy transformace pro rychlost světla blížící se nekonečnu.

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{\infty^2}}}=\frac{x-vt}{\sqrt{1-0}}=x-vt$$

$$t'=\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad t'=\frac{t-\frac{v}{\infty^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{\infty^2}}}=\frac{t-0\cdot x}{\sqrt{1-0}}=t$$

Získali jsme klasické Galileiho transformace $\Rightarrow$ Galileiho transformace jsou správným řešením pro transformování souřadnic ve vesmíru, kde je nekonečná maximální rychlost (a takový pro nás byl náš vesmír, dokud jsme nezačali dělat pokusy se světlem a urychlovači částic).

Pedagogická poznámka: Následující část hodiny je myšlena jako čistá ukázka toho, jak se dá s transformačními rovnicemi pracovat. Po studentech nic z následujících úprav nechci a nechci, aby si mé úpravy psali do sešitu. Mají pouze sledovat to, co na tabuli počítám, a pokoušet se pochytit co nejvíce. Do normálních kolejí se hodina vrací až po odvození vzorce pro sčítání rychlostí.

Teď si ukážeme, jak se je možné „cvičit“ s transformačními rovnicemi.

Lorentzova transformace: $x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ = soustava rovnic, které souřadnice naměřené ve stojící soustavě (například stojíme na Zemi a měříme vzhledem k ní), přepočítává na souřadnice naměřené v pohybující se soustavě (například spojené s raketou, která letí okolo Země a my se na ní ze Země díváme).

Obrácená Lorentzova transformace: $x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, $y = y'$, $z = z'$, $t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ = soustava rovnic, které souřadnice naměřené v pohybující se soustavě (například spojené s raketou, která letí okolo a my se na ní ze Země díváme), přepočítává na souřadnice naměřené ve stojící soustavě (stojíme na Zemi a měříme vzhledem k ní).

⇒ V obou případech tedy stojíme na Zemi (kterou považujeme za nehybnou, souřadnice měřené vůči ní jsou bez čárky) a koukáme na kosmonauta, který letí v raketě (souřadnice měřené z rakety mají čárku).

Nejdřív si spočteme Δt : $\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t_2' + \frac{v}{c^2}x_2'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{t_1' + \frac{v}{c^2}x_1'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t_2' + \frac{v}{c^2}x_2' - t_1' - \frac{v}{c^2}x_1'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{(t_2' - t_1') + \frac{v}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Co nám vyšlo?

- Dvě událostí současné v soustavě S' (platí $(t_2' - t_1') = 0$) nemusí být současné v soustavě S (muselo by vyjít $(t_2 - t_1) = 0$, ale ve zlomku je ještě člen $\frac{v}{c^2}(x_2' - x_1')$, který je nulový pouze, když $(x_2' - x_1') = 0$ (události se staly na stejném místě) ⇒ relativita současnosti.
- Sledujeme plynutí času na předmětu nepohyblivém v soustavě S' : ⇒ platí: $(x_2' - x_1') = 0$ $\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{(t_2' - t_1') + \frac{v}{c^2}0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ $\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ - vzorec pro dilataci času (ze Země vidíme, jak v raketě plyne čas pomaleji).

Pomocí transformačních rovnic můžeme vyřešit i náš problém se sčítáním rychlostí. Sledujeme ze Země (soustava *S*) jak v raketě (soustava *S'* pohybující se vůči Zemi rychlostí *v*) běží kosmonaut rychlostí *u'*. Jak spočteme rychlost *u*, kterou mu naměříme ze Země?

Pro rychlost platí: $u=\frac{\Delta x}{\Delta t}$.

Vztah pro Δt už známe: $\Delta t=t_2-t_1=\frac{(t_2'-t_1')+\frac{v}{c^2}(x_2'-x_1')}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{\Delta t'+\frac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

Podobně odvodíme vztah pro Δx :

$$\Delta x=x_2-x_1=\frac{x_2'+vt_2'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-\frac{x_1'+vt_1'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{(x_2'-x_1')+v(t_2'-t_1')}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{\Delta x'+v\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} .$$

Teď můžeme dosadit do vztahu pro rychlost: $u=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{\frac{\Delta x'+v\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}{\frac{\Delta t'+\frac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}=\frac{\Delta x'+v\Delta t'}{\Delta t'+\frac{v}{c^2}\Delta x'}$.

Upravíme vztah tak, abychom v něm získali výraz $\frac{\Delta x'}{\Delta t'}=u'$ (chceme vzorec, který umožní spočítat rychlost u pozorovanou ze Země z rychlosti rakety *v* a rychlosti kosmonauta vůči raketě u').

$$u=\frac{\Delta x'+v\Delta t'}{\Delta t'+\frac{v}{c^2}\Delta x'}=\frac{\Delta x'+v\Delta t'}{\Delta t'(1+\frac{v}{c^2}\frac{\Delta x'}{\Delta t'})}=\frac{\frac{\Delta x'}{\Delta t'}+v\frac{\Delta t'}{\Delta t'}}{1+\frac{v}{c^2}\frac{\Delta x'}{\Delta t'}}=\frac{u'+v}{1+\frac{v\cdot u'}{c^2}}$$

Vztah pro sčítání rychlostí: $u=\frac{u'+v}{1+\frac{v\cdot u'}{c^2}}$. Jak funguje si ukážeme na příkladech.

Př. 2: Raketa letí vzhledem k Zemi rychlostí $\frac{3}{4}c$. Stejnou rychlostí běží v raketě vůči ní ve směru jejího letu kosmonaut. Urči rychlost, kterou se kosmonaut pohybuje vůči Zemi.

Raketa letí vůči zemi rychlostí $\frac{3}{4}c$ $\Rightarrow$ $v=\frac{3}{4}c$.

Kosmonaut běží vůči raketě rychlostí $\frac{3}{4}c$ $\Rightarrow$ $u'=\frac{3}{4}c$.

Rychlost kosmonauta vůči Zemi $u=?$

$$u=\frac{u'+v}{1+\frac{v\cdot u'}{c^2}}=\frac{\frac{3}{4}c+\frac{3}{4}c}{1+\frac{\frac{3}{4}c\cdot\frac{3}{4}c}{c^2}}=\frac{\frac{3}{2}c}{1+\frac{9}{16}}=\frac{\frac{3}{2}c}{\frac{25}{16}}=\frac{24}{25}c$$

Vzorec funguje přesně tak, jak jsme očekávali. I když by klasický součet obou rychlostí dal

1,5c, při použití správného vzorce zjistíme, že naměříme rychlost menší než rychlost světla.

Problém: Ze Země vidíme, že se kosmonaut pohybuje vůči raketě menší rychlostí než $\frac{3}{4}c$. Jak je možné, že stihne doběhnout na předek rakety v okamžiku, kdy budou hodiny, které zde stojí, ukazovat stejně pro něj i pozorovatele na zemi (dotek špičky rakety, kde jsou hodiny umístěny je soumístná událost)?
Řešení: Raketa se vůči Zemi pohybuje, je tedy zkrácená a kosmonaut tak musí při pohledu ze Země uběhnout menší vzdálenost $\Rightarrow$ tuto kratší vzdálenost uběhne ze stejnou dobu i menší rychlostí, kterou ho ze Země vidíme běžet.

Dokáže vzorec zajistit, aby světlo mělo vždy rychlost c?

Př. 3: Raketa letí vzhledem k Zemi rychlostí v. Kosmonaut v raketě rozsvítí baterku ve směru jejího letu. Jakou rychlostí letí světlo z hlediska pozorovatele na Zemi?

Raketa letí vůči zemi rychlostí v.
Světlo letí vůči raketě rychlostí $u'=c$.
Rychlost světla vůči Zemi $u=?$
$$u=\frac{u'+v}{1+\frac{v\cdot u'}{c^2}}=\frac{c+v}{1+\frac{v\cdot c}{c^2}}=\frac{c+v}{1+\frac{v}{c}}=\frac{c+v}{\frac{c+v}{c}}=c$$
Vzorec funguje přesně tak, jak jsme očekávali. Světlo letí rychlostí c i vůči pozorovateli na Zemi.

Př. 4: Raketa letí vzhledem k Zemi rychlostí v. Kosmonaut v raketě rozsvítí baterku proti směru jejího letu. Jakou rychlostí letí světlo z hlediska pozorovatele na Zemi?

Raketa letí vůči zemi rychlostí v.
Světlo letí vůči raketě rychlostí opačným směrem $u'=-c$.
Rychlost světla vůči Zemi $u=?$
$$u=\frac{u'+v}{1+\frac{v\cdot u'}{c^2}}=\frac{-c+v}{1+\frac{v\cdot(-c)}{c^2}}=\frac{v-c}{1-\frac{v}{c}}=\frac{v-c}{\frac{c-v}{c}}=-c$$
Vzorec funguje přesně tak, jak jsme očekávali. Světlo letí rychlostí c opačným směrem než raketa i vůči pozorovateli na Zemi.

Shrnutí: Pro převod souřadnic platí v teorii relativity Lorentzovy transformace. Z těchto rovnic můžeme snadno odvodit všechny dosavadní efekty i vzorec pro sčítání rychlostí, který zabraňuje tomu, aby mohl předmět získat nadsvětelnou rychlost.